

Programme de colle n°22

semaine du 23 au 27 mars

Notions vues en cours

Chapitre 27 : Dimension d'un espace vectoriel (suite)

- Définition de la **dimension d'un e.v.** (de dimension finie) comme cardinal d'une base, notation $\dim E$, bases canoniques et dimensions d'e.v. classiques : $\{0_E\}$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$, Si $\dim E = n$, une famille libre / génératrice de E admet au plus / au moins n éléments, et si elle a exactement n éléments, c'est une base
- Si F est un s.e.v. de E alors $\dim F \leq \dim E$, avec cas d'égalité
- Base adaptée à une décomposition $E = F \oplus G$, concaténer une base de F avec une base de G donne une base de E (adaptée à $E = F \oplus G$)
- Fragmenter une base en deux sous-familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ entraîne que $\text{Vect}(\mathcal{F})$ et $\text{Vect}(\mathcal{G})$ sont supplémentaires ; tout s.e.v. admet un supplémentaire
- Dimension de $F \oplus G$, formule de Grassman, caractérisations que deux s.e.v. soient supplémentaires
- E est de dimension infinie ssi E possède une famille libre avec une infinité d'éléments, ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble E possède une famille libre à n éléments

Chapitre 28 : Applications linéaires (partie A)

- **Application linéaire** (ou morphisme d'e.v.) : définition, ensemble $\mathcal{L}(E, F)$, propriétés simples ($f(0_E) = 0_F$, etc.), endo- / iso- / automorphisme
- Exemples classiques d'applications linéaires : dérivation, intégration, évaluation en un point, transposée de matrice, limite d'une suite ou d'une fonction, ...
- La combinaison linéaire / la composition / l'inverse d'application(s) linéaire(s) est une application linéaire, $\mathcal{L}(E, F)$ est un s.e.v. de F^E , étant donné g une application linéaire, l'application $f \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto g \circ f$ et l'application $f \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto f \circ g$ sont linéaires
- L'image directe et l'image réciproque d'un s.e.v. par une application linéaire sont des s.e.v.
- **Noyau** et **image** d'une application linéaire, notations $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$, caractérisations de l'injectivité, de la surjectivité en fonction de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$
- Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$, alors $\text{Im } f$ est l'ensemble engendré par la famille $(f(e_i))_{i \in I}$
- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des éléments d'une base, par ses restrictions sur deux s.e.v. supplémentaires
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective (resp. surjective, resp. bijective) ssi en appliquant f à tous les vecteurs d'une base de E , on obtient une famille libre (resp. famille génératrice de F , resp. base de F) ssi en appliquant f à tous les vecteurs de toute base de E , on obtient une famille libre (resp. famille génératrice de F , resp. base de F)

La structure d'anneau de $\mathcal{L}(E)$ et le théorème du rang sont hors-programme cette semaine. Il faut savoir déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire (sous forme de Vect et/ou d'équations sur les coordonnées des vecteurs), et en donner une base.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examineur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **24, 27 et 28**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont exigibles. Les énoncés des définitions et théorèmes doivent être clairement... énoncés !*

1. Sans démonstration : formule de Grassman. Avec démonstration : donner 3 caractérisations de $F \oplus G = E$ Chapitre 28, Théorèmes 28.20 et 28.21
2. Définition d'application linéaire, montrer que la combinaison linéaire de deux applications linéaires et que la réciproque d'une application linéaire sont linéaires. Chapitre 29, Définitions 29.1, Théorèmes 29.4 et 29.9
3. L'image directe d'un s.e.v. est un s.e.v., définition de $\text{Im } f$. Pourquoi est-ce un s.e.v. ? Sans démonstration : caractérisation de la surjectivité en fonction de $\text{Im } f$ Chapitre 29, Théorèmes 29.10 (assertion 1), Définition 29.12 et Théorème 29.13
4. L'image réciproque d'un s.e.v. est un s.e.v., définition de $\text{Ker } f$. Pourquoi est-ce un s.e.v. ? Sans démonstration : caractérisation de l'injectivité en fonction de $\text{Ker } f$ Chapitre 28, Théorèmes 29.10 (assertion 2), Théorème 29.11 et le rappel au-dessus sert de définition de $\text{Ker } f$.

Questions Flash au programme :

Chapitre 28 : (on suppose que E est un $\mathbb{K}$ -e.v.)

- Compléter avec “libre”, “liée” ou “génératrice” : toute sur-famille d'une famille est encore (plusieurs mots peuvent convenir)
- Compléter avec “libre”, “liée” ou “génératrice” : toute sous-famille d'une famille est encore (plusieurs mots peuvent convenir)
- Énoncer les théorèmes de la base incomplète et de la base extraite.
- À quelle condition est-ce qu'un ensemble E est dit de dimension finie ? Comment définit-on alors la dimension de E , càd l'entier $\dim E$?
- Donner la dimension de l'e.v. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et écrire trois matrices issues de sa base canonique.
- Donner la dimension de $\mathbb{K}^n$ et écrire trois vecteurs issus de sa base canonique. De plus, quelle est la dimension de $E \times F$?
- Si $\dim E = n$, que peut-on dire sur le cardinal d'une famille libre de E ? On attend deux propriétés.
- Si $\dim E = n$, que peut-on dire sur le cardinal d'une famille génératrice de E ? On attend deux propriétés.
- On suppose E de dimension finie et F un s.e.v. de E . Que peut-on dire sur les dimensions de F et de E ? On attend deux propriétés.
- Soit F, G deux s.e.v. de E . Que doit vérifier une base $\mathcal{B}$ pour être une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$? Comment obtenir une telle base ?
- Énoncer la formule de Grassman pour deux s.e.v. F et G . Que devient cette formule si F et G sont en somme directe ?
- Soit E un e.v. et F, G deux s.e.v. de E . Donner 3 caractérisations de $F \oplus G = E$.

Chapitre 27 (on suppose que E est un $\mathbb{K}$ -e.v.) :

- Donner cinq $\mathbb{K}$ -e.v. usuels (rappel : la liste est $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^\Omega, \mathbb{K}[X], \mathbb{K}(X), \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
- Soit $F \subset E$. Donner une caractérisation de “ F est un s.e.v. de E ”.
- Donner la définition en termes d'ensemble de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

- Soit A une partie de E . Compléter : $\text{Vect}(A)$ est le plus de E qui A et $\text{Vect}(A) = A$ ssi
- Donner la définition de “ $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de E ”.
- Donner la définition de “ $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre”. Comment appelle-t-on une famille qui n’est pas libre ?
- Donner la définition de “ $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille liée”.
- Donner la définition de “ u et v sont colinéaires”. Que peut-on alors en déduire sur la famille (u, v) ?
- Que signifie la notation $F \oplus G$? En donner une caractérisation simple en fonction de F et G .
- Que signifie “ F et G sont supplémentaires” ? En donner une caractérisation simple en fonction de F et G .

Chapitre 24 :

- Rappeler le théorème de d’Alembert-Gauss.
- Quels sont les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$? et sur $\mathbb{R}$?
- Donner la forme de la factorisation d’un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, en précisant le rôle de chaque variable
- Donner la forme de la factorisation d’un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, en précisant le rôle de chaque variable
- Qu’appelle-t-on un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$? et scindé à racines simples ?
- En termes de racines, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $P \wedge Q = 1$
- Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$, dont on note α, β, γ les racines complexes. Donner les relations coefficients-racines.
- Quelle structure algébrique possède l’ensemble $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles ?
- Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Que doit-on vérifier pour que F soit irréductible ?
- Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Que vaut $\deg(F)$? Dans quel ensemble prend-il ses valeurs ?
- Quelle est la définition d’un pôle d’une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$? et d’une racine ?
- Donner la forme de la DES sur $\mathbb{R}(X)$ ou sur $\mathbb{C}(X)$ pour une fraction rationnelle donnée par l’examinateur (le dénominateur étant déjà factorisé ou facile à factoriser, et la division euclidienne n’étant pas nécessaire).